

$$(1) \quad y' = 1 - y \quad - \quad S(x) = 1, \quad g(y) = 1 - y$$

$$(a) \quad D_g = \mathbb{R} = I_1$$

$$(b) \quad D_g = \mathbb{R}, \quad g = 0 \Leftrightarrow y = 1, \quad J_1 = (-\infty, 1), \quad J_2 = (1, \infty)$$

$$(c) \quad y_0 = 1 \quad (\text{jediné stacionární řešení - na } J_1 = \mathbb{R})$$

$$(d) \quad F(x) = x, \quad x \in I_1$$

$$G(y) = -\log(1-y), \quad y \in J_1$$

$$= -\log(y-1), \quad y \in J_2$$

$$(e) \quad \text{volme } C \in \mathbb{R}, \text{ potom}$$

$$\{x \in I_1 : F(x) + C \in G(J_1)\} = \{x \in \mathbb{R} : x + C \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$\uparrow$$

$$y \in (-\infty, 1) \Leftrightarrow -\log(1-y) \in \mathbb{R}$$

$$\text{a podobně} \quad \{x \in I_1 : F(x) + C \in G(J_2)\} = \{x \in \mathbb{R} : x + C \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$\uparrow$$

$$y \in (1, \infty) \Leftrightarrow -\log(y-1) \in \mathbb{R}$$

$$\text{Dále} \quad G^{-1}(z) = 1 - e^{-z}, \quad z \in \mathbb{R} = G(J_1)$$

$$\left[(-\log(1-y) = z) \Leftrightarrow (e^{-z} = 1-y) \Leftrightarrow (y = 1 - e^{-z}) \right]$$

$$\text{a} \quad G^{-1}(z) = 1 + e^{-z}, \quad z \in \mathbb{R} = G(J_2)$$

$$\left[(-\log(y-1) = z) \Leftrightarrow (y-1 = e^{-z}) \Leftrightarrow (y = e^{-z} + 1) \right]$$

$$\text{Dostáváme tedy řešení} \quad y_1 = 1 - e^{-(x+C)}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \leftarrow G^{-1}(x+C) \quad \text{pro } J = J_1$$

$$y_2 = 1 + e^{-(x+C)}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \leftarrow G^{-1}(x+C) \quad \text{pro } J = J_2$$

Poznamenejme, že y_1 odpovídá řešení $1 + De^{-x}$ $D < 0$,

y_2 odpovídá řešení $1 + De^{-x}$ $D > 0$.

a pro úplnost y_0 odpovídá řešení $1 + De^{-x}$ $D = 0$.

(f) řešení jsou maximální $\rightarrow$ vertikála



(2) $y' = y^2 - 4$ - $f(x) = 1$, $g(y) = y^2 - 4$

(a) $D_g = \mathbb{R} = I_1$

(b) $D_g = \mathbb{R}$, $g(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2$, $J_1 = (-\infty, -2)$, $J_2 = (-2, 2)$, $J_3 = (2, \infty)$

(c) $y_0 = -2$, $y_1 = 2$ jsou jediná stacionární řešení (na $J_1 = \mathbb{R}$)

(d) $F(x) = x$, $J = J_1$

$G(y) = \frac{1}{4} \log \left| \frac{2-y}{2+y} \right|$ na $J = J_1, J_2, J_3$

(e) platí $\lim_{y \rightarrow -\infty} G(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \log(t) = 0 = \lim_{y \rightarrow \infty} G(y)$

$$a \quad \lim_{y \rightarrow 2^+} G(y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow 2^-} G(y) = \infty$$

$$\text{Tedy } G(J_1) = (0, \infty), \quad G(J_2) = \mathbb{R}, \quad G(J_3) = (-\infty, 0)$$

$$\text{Volme } C \in \mathbb{R}$$

$$\bullet J = J_2$$

$$\{x \in I_1: F(x+C) \in G(J)\} = \{x \in \mathbb{R}: x+C \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$G(y) = \frac{1}{4} \log\left(\frac{2-y}{2+y}\right) \Rightarrow G^{-1}(z) = \frac{2-2e^{4z}}{1+e^{4z}}$$

$$\left(z = \frac{1}{4} \log\left(\frac{2-y}{2+y}\right) \Leftrightarrow e^{4z} = \frac{2-y}{2+y} \Leftrightarrow y(e^{4z}+1) = 2-2e^{4z} \Leftrightarrow y = \frac{2-2e^{4z}}{1+e^{4z}} \right)$$

To dávat řešení!

$$y_2 = \frac{2-2e^{4x+4C}}{1+e^{4x+4C}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet J = J_1, J_3$$

$$\{x \in I_1: F(x+C) \in G(J_1)\} = \{x \in \mathbb{R}: x+C \in (0, \infty)\} = (-C, \infty)$$

$$\{x \in I_1: F(x+C) \in G(J_3)\} = \{x \in \mathbb{R}: x+C \in (-\infty, 0)\} = (-\infty, -C)$$

$$G(y) = \frac{1}{4} \log\left(\frac{y-2}{y+2}\right), \quad G^{-1}(z) = \frac{2+2e^{4z}}{1-e^{4z}}$$

$$\left(z = \frac{1}{4} \log\left(\frac{y-2}{y+2}\right) \Leftrightarrow e^{4z} = \frac{y-2}{y+2} \Leftrightarrow y(e^{4z}-1) = -2-2e^{4z} \Leftrightarrow y = \frac{2+2e^{4z}}{1-e^{4z}} \right)$$

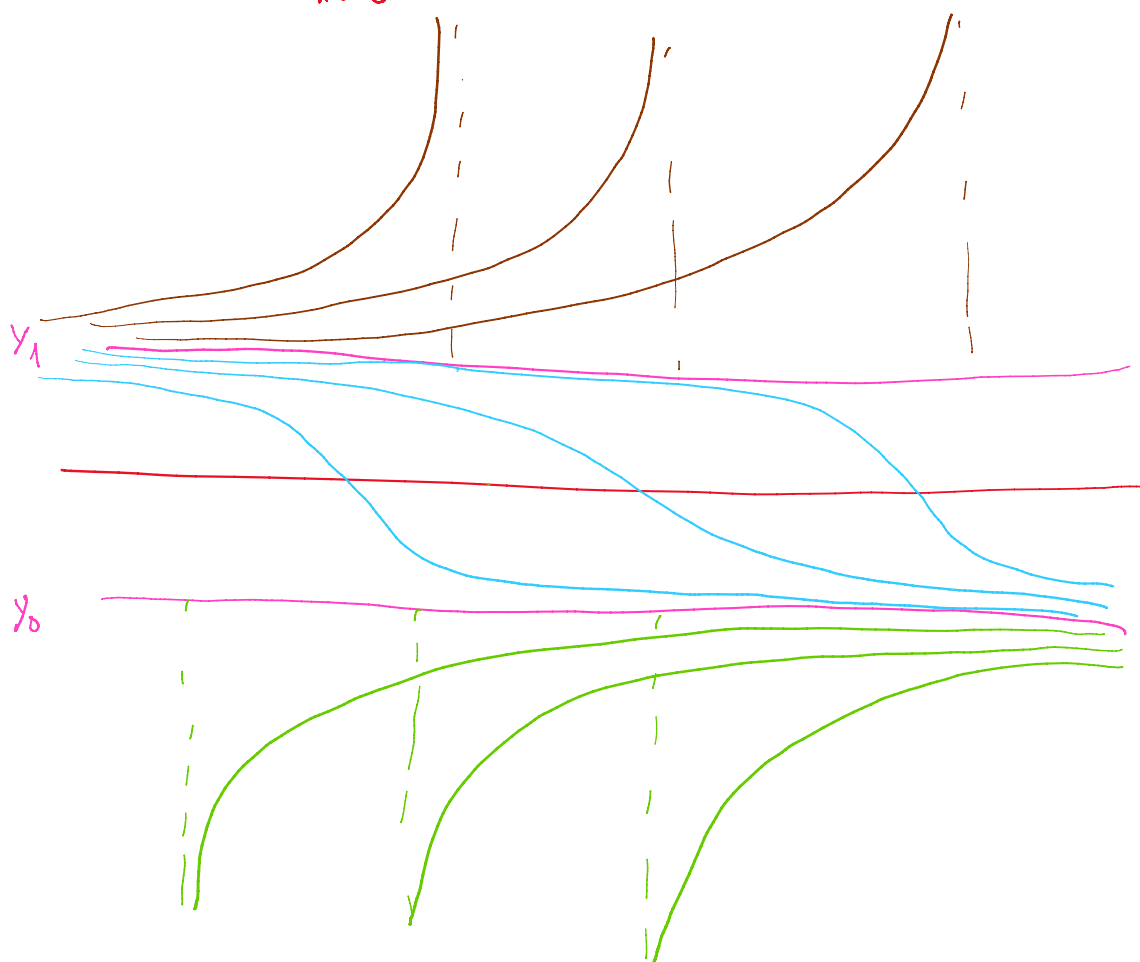
Řešení:

$$y_3 = \frac{2+2e^{4x+4C}}{1-e^{4x+4C}}, \quad x \in (-C, \infty) \text{ nebo } x \in (-\infty, -C)$$

↑
odpovídá J_1

↑
odpovídá J_3

(f) protože $\lim_{x \rightarrow -C^+} y_3(x) = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow C^-} y_3(x) = \infty$ jsou řešení maximální $\rightarrow$ nemí lepení



(g) $y' = 2x^2 y^2$, $f(x) = 2x^2$, $g(y) = y^2$

(a) $D_f = \mathbb{R} = I_1$

(b) $D_g = \mathbb{R}$, $g(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \rightarrow J_1 = (-\infty, 0), (0, \infty)$

(c) stacionární řešení $y_0 = 0$

(d) $F(x) = \frac{2}{3}x^3$, $x \in I_1$

$G(x) = -\frac{1}{y}$, $y \in J_1, J_2$

(e) $G^{-1}(z) = -\frac{1}{z}$ (na $J_{1,2}$)

volme $C \in \mathbb{R}$

• $J = J_1 \Rightarrow \{x \in I_1 : F(x) + C \in G(J_1)\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3}x^3 + C \in (0, \infty)\} = (-^3\sqrt{\frac{3}{2}C}, \infty)$

$\frac{2}{3}x^3 + C \in (0, \infty) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^3 \in (-C, \infty) \Leftrightarrow x \in (-^3\sqrt{\frac{3}{2}C}, \infty)$

Dostáváme tedy řešení!

$y_1 = -\frac{1}{\frac{2}{3}x^3 + C}$ na $(-^3\sqrt{\frac{3}{2}C}, \infty)$

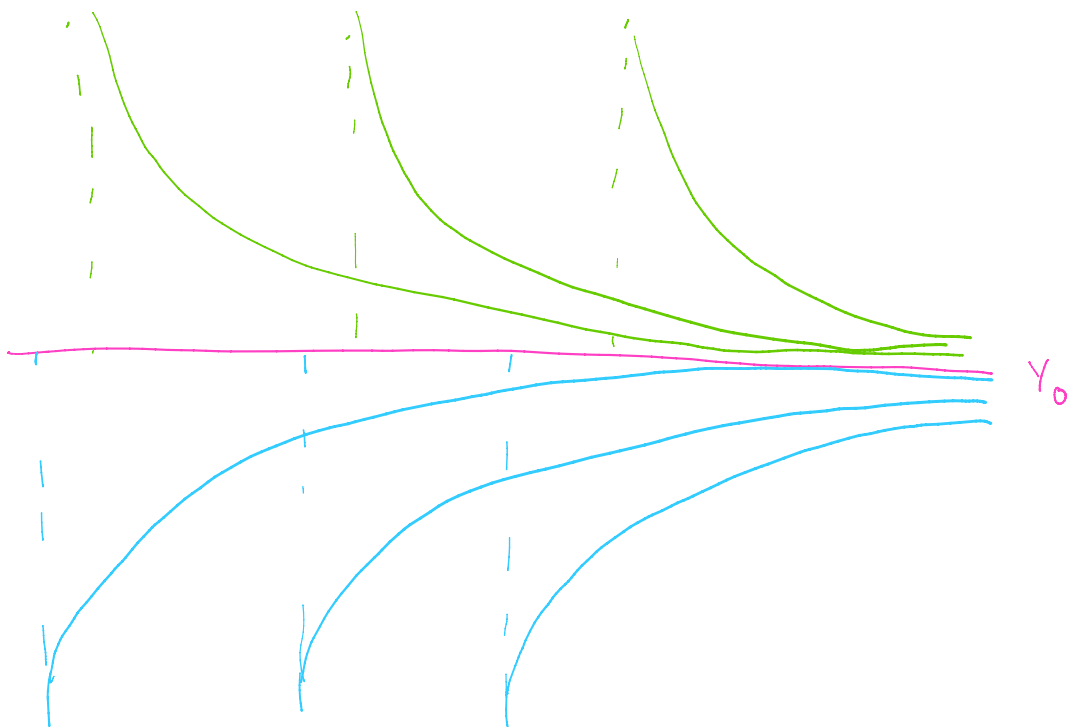
obdobně

• $J = J_2 \Rightarrow \{x \in I_1 : F(x) + C \in G(J_2)\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3}x^3 + C \in (-\infty, 0)\} = (-\infty, -^3\sqrt{\frac{3}{2}C})$

$y_2 = -\frac{1}{\frac{2}{3}x^3 + C}$ na $(-\infty, -^3\sqrt{\frac{3}{2}C})$

(f)

$\lim_{x \rightarrow -^3\sqrt{\frac{3}{2}C}^+} y_1(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -^3\sqrt{\frac{3}{2}C}^-} y_2(x) = \infty \rightarrow$ řešení jsou maximální $\rightarrow$ žádné lepení!



$$(4) \quad y' = \sqrt[3]{y^2} - f(x) = 1, \quad g(y) = y^{\frac{2}{3}}$$

$$(a) \quad D_f = \mathbb{R} = I_1$$

$$(b) \quad D_g = \mathbb{R}, \quad g=0 \Leftrightarrow y=0 \rightarrow J_1 = (-\infty, 0), \quad J_2 = (0, \infty)$$

$$(c) \quad \text{jediné stacionární řešení } y_0 = 0$$

$$(d) \quad F(x) = x \text{ na } I_1$$

$$G(y) = \sqrt[3]{y} \text{ na } J_1, J_2$$

$$(e) \quad G^{-1}(z) = \frac{z^3}{27} \quad z \in J_1 \text{ nebo } J_2$$

$$\text{Volme } C \in \mathbb{R}$$

$$\bullet J = J_1 \quad \{x \in I_1: F(x) + C \in J_1\} = \{x \in \mathbb{R}: x + C \in (-\infty, 0)\} = (-\infty, -C)$$

$$\text{Řešení: } y_1 = \frac{(x+C)^3}{27}, \quad x \in (-\infty, -C)$$

$$\bullet J = J_2 \quad \{x \in I_1: F(x) + C \in J_2\} = (-C, \infty)$$

$$y_2 = \frac{(x+C)^3}{27}, \quad x \in (-C, \infty)$$

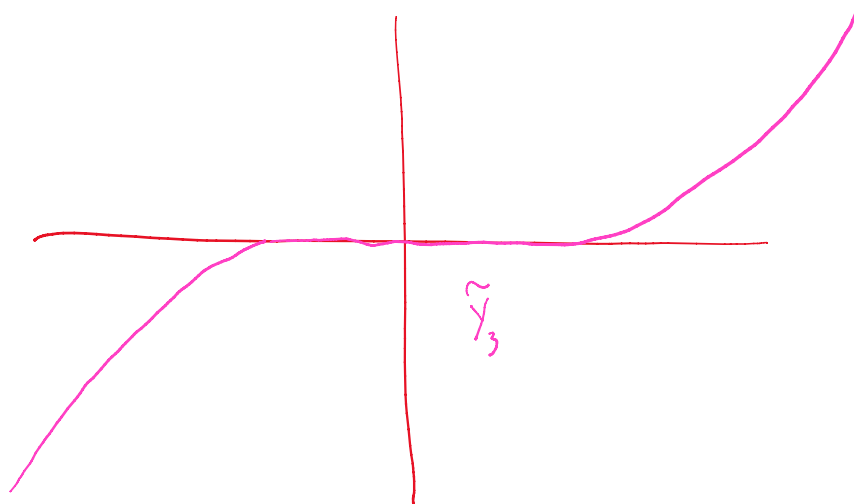
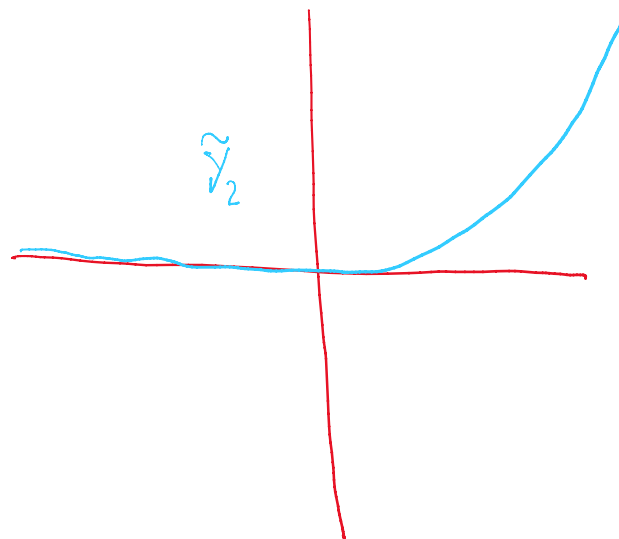
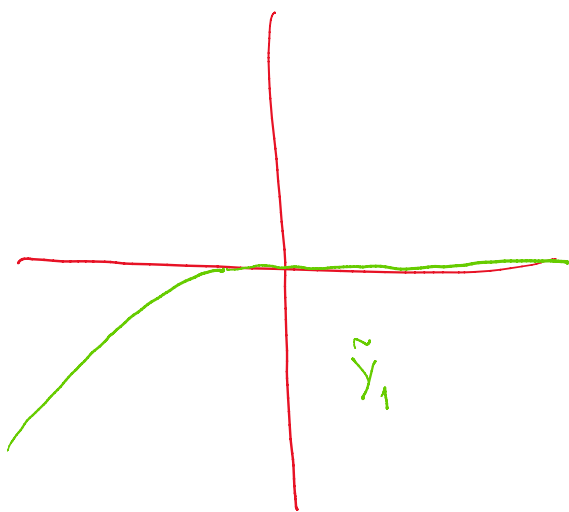
$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow -C^-} y_1(x) = D = \lim_{x \rightarrow -C^+} y_2(x) \rightarrow \text{budeme lepit}$$

$$\text{Obecné řešení: pro } D < C \quad \tilde{y}_0 = y_0$$

$$\tilde{y}_1(x) = \begin{cases} \frac{(x+C)^3}{27} & x \in (-\infty, -C) \\ 0 & x \in [-C, \infty) \end{cases}, \quad \tilde{y}_2(x) = \begin{cases} \frac{(x+C)^3}{27} & x \in (-C, \infty) \\ 0 & x \in (-\infty, -C) \end{cases}$$

$$\tilde{y}_3(x) = \begin{cases} \frac{(x+C)^3}{27} & x \in (-\infty, -C) \\ 0 & x \in [-C, -D] \\ \frac{(x+D)^3}{27} & x \in (-D, \infty) \end{cases}$$

Toto jsou jistě maximální řešení (definována na $\mathbb{R}$)



$$(5) \quad y' = \sqrt{y-y^2} \rightarrow f(x)=1, \quad g(x)=\sqrt{y-y^2}$$

$$(a) \quad D_S = \mathbb{R} = I_1$$

$$(b) \quad D_g = [0,1], \quad g(x)=0 \Leftrightarrow x=0,1 \rightarrow J_1 = (0,1)$$

$$(c) \quad y_0=0, \quad y_1=1 \text{ stacionární řešení}$$

$$(d) \quad F(x)=x, \quad x \in I_1$$

$$G(y) = -2 \arcsin \sqrt{1-y}, \quad y \in J_1$$

$$(e) \quad G^{-1}(z) = \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) \quad G(J_1) = (-\pi, 0)$$

$$z = -2 \arcsin \sqrt{1-y} \Leftrightarrow \sin\left(-\frac{z}{2}\right) = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow y = 1 - \sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\forall \text{me } C \in \mathbb{R} \quad \{x \in I_1 : F(x) + C \in G(J_1)\} = \{x \in \mathbb{R} : x + C \in (-\pi, 0)\} = (-\pi - C, -C)$$

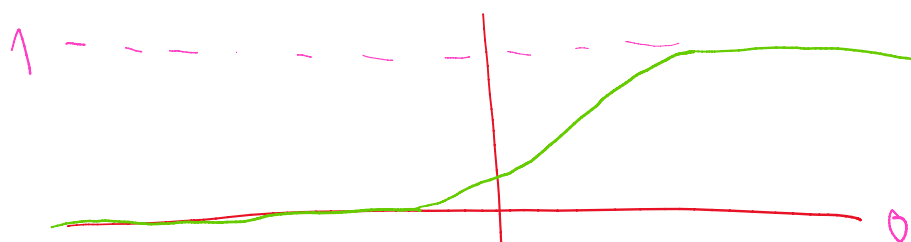
$$\text{Řešení!} \quad y_2 = \cos^2\left(\frac{x+C}{2}\right), \quad x \in (-\pi - C, -C)$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow -\pi - C^+} y_2(x) = \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -C} y_2(x) = \cos^2(0) = 1$$

$$\text{Obecné řešení} \quad \tilde{y}_0 = y_0, \quad \tilde{y}_1 = y_1 \quad \text{a pro } C \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{y}_2 = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -\pi - C) \\ \cos^2\left(\frac{x+C}{2}\right), & x \in [-\pi - C, -C] \\ 1 & x \in (-C, \infty) \end{cases}$$

(definováno na $\mathbb{R} \rightarrow$ maximální řešení)



(6) $y' = \sqrt{1-y^2}$ - $f(x)=1$, $g(y)=\sqrt{1-y^2}$ (viz též intuitivní)

(a) $D_f = \mathbb{R}$, $I_1 = \mathbb{R}$

(b) $D_g = [-1, 1]$, $g(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$, $J_1 = (-1, 1)$

(c) stacionární řešení $y_0 = -1$, $y_1 = 1$

(d) $F(x) = x$ na I_1
 $G(y) = \arcsin y$ na J_1

(e) $G^{-1}(z) = \sin z$, $G(J_1) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

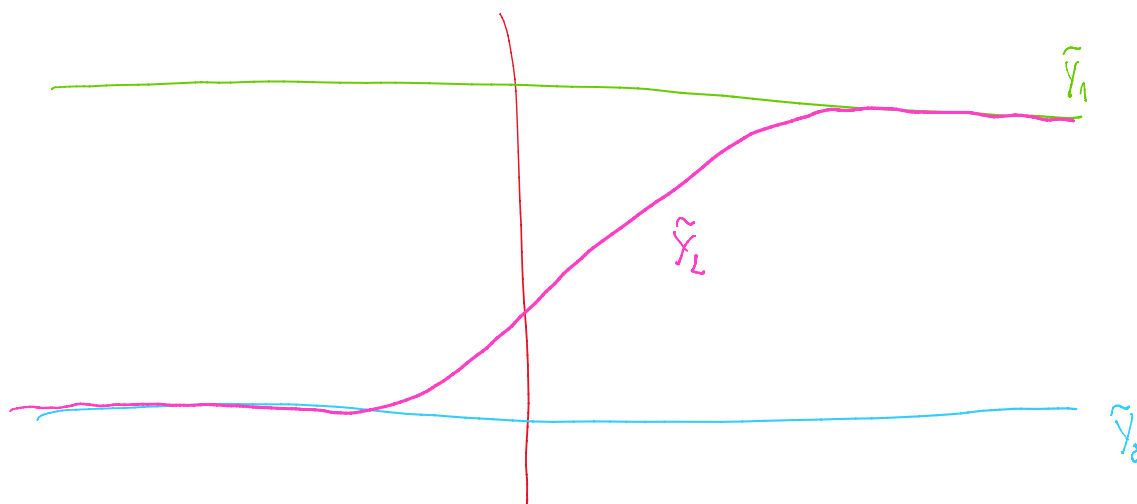
$$\{x \in I_1 : F(x) + C \in G(J_1)\} = \{x \in (-1, 1) : x + C \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\} = (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C)$$

Řešení: $y_2 = \sin(x+C)$, $x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C)$

(f) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} - C} y_2(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - C} y_2(x) = 1$

$\tilde{y}_0 = y_0$, $\tilde{y}_1 = y_1$, $\tilde{y}_2(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - C) \\ \sin(x+C), & x \in [-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C] \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2} - C, \infty) \end{cases}$

↗
pro $C \in \mathbb{R}$



$$(7) \quad y' = \frac{6xy^{\frac{1}{3}}}{1+x^2} - s(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad q(x) = 3y^{\frac{2}{3}} \quad (\text{viz též tutorial})$$

$$(a) \quad D_f = \mathbb{R}, \quad I_1 = \mathbb{R}$$

$$(b) \quad D_g = \mathbb{R}, \quad g(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0, \quad J_1 = (-\infty, 0), \quad J_2 = (0, \infty)$$

$$(c) \quad \text{stacionární řešení } y_0 = 0$$

$$(d) \quad F(x) = \log(1+x^2) \quad \text{na } I_1$$

$$G(x) = y^{\frac{4}{3}} \quad \text{na } J_1, J_2$$

$$(e) \quad G^{-1}(z) = z^3 \quad \text{na } G(J_1) = (-\infty, 0) \quad \text{a } G(J_2) = (0, \infty)$$

$$\{x \in I_1 : F(x) + C \in G(J_1)\} = \{x \in \mathbb{R} : \log(1+x^2) + C \in (-\infty, 0)\} = \{x \in \mathbb{R} : \log(1+x^2) \in (-\infty, -C)\}$$

$$J = J_1 \rightarrow$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : 1+x^2 \in (0, e^{-C})\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in (-1, e^{-C}-1)\}$$

$$= (-\sqrt{e^{-C}-1}, \sqrt{e^{-C}-1}) \quad C < 0 \quad (\text{jinak dostáváme } \emptyset)$$

Řešení:

$$Y_1 = (\log(1+x^2) + C)^3, \quad x \in (-\sqrt{e^{-C}-1}, \sqrt{e^{-C}-1}), \quad C < 0$$

$$\{x \in I_1 : F(x) + C \in G(J_2)\} = \{x \in \mathbb{R} : \log(1+x^2) \in (-C, \infty)\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in (e^{-C}-1, \infty)\}$$

$$= (-\infty, -\sqrt{e^{-C}-1}) \cup (\sqrt{e^{-C}-1}, \infty), \quad C \leq 0$$

$$Y_2 = (\log(1+x^2) + C)^3, \quad x \in (-\infty, -\sqrt{e^{-C}-1}) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} C \leq 0$$

$$Y_3 = (\log(1+x^2) + C)^3, \quad x \in (\sqrt{e^{-C}-1}, \infty)$$

$$= \mathbb{R}, \quad C > 0$$

$$y_4 = (\log(1+x^2) + C)^3, \quad x \in \mathbb{R} \quad C > 0$$

(f) řešení je poměrně komplikované - viz faktoria!

(8) $x y' + y = y^2 \xrightarrow{(*)} y' = \frac{y^2 - y}{x} \xrightarrow{(*)} f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(y) = y^2 - y$
 $\uparrow$
 pozor! není ekvivalentní

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad I_1 = (-\infty, 0), \quad I_2 = (0, \infty)$

(b) $D_g = \mathbb{R}, \quad g(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0, 1 \rightarrow J_1 = (-\infty, 0), J_2 = (0, 1), J_3 = (1, \infty)$

(c) stacionární řešení: $y_0 = 0, \quad y_1 = 1$

(d) $F(x) = \log|x|, \quad x \in I_1, I_2$

$G(y) = \log\left|\frac{y-1}{y}\right|, \quad y \in J_1, J_2, J_3 \quad \left(G(y) = \log \frac{y-1}{y} \quad y \in J_1, J_3, \quad G(y) = \log \frac{1-y}{y}, \quad y \in J_2 \right)$

(e) $I = I_1, \quad J = J_1 \quad \left(F(x) = \log(-x), \quad G(y) = \log \frac{y-1}{y} \right)$
 $\left(-\infty, 0 \right) \quad \left(-\infty, 0 \right)$

$\{x \in (-\infty, 0) : \log(-x) + C \in (-\infty, 0)\} = (-\infty, -e^{-C}), \quad G'(z) = \frac{1}{1-z^2}$

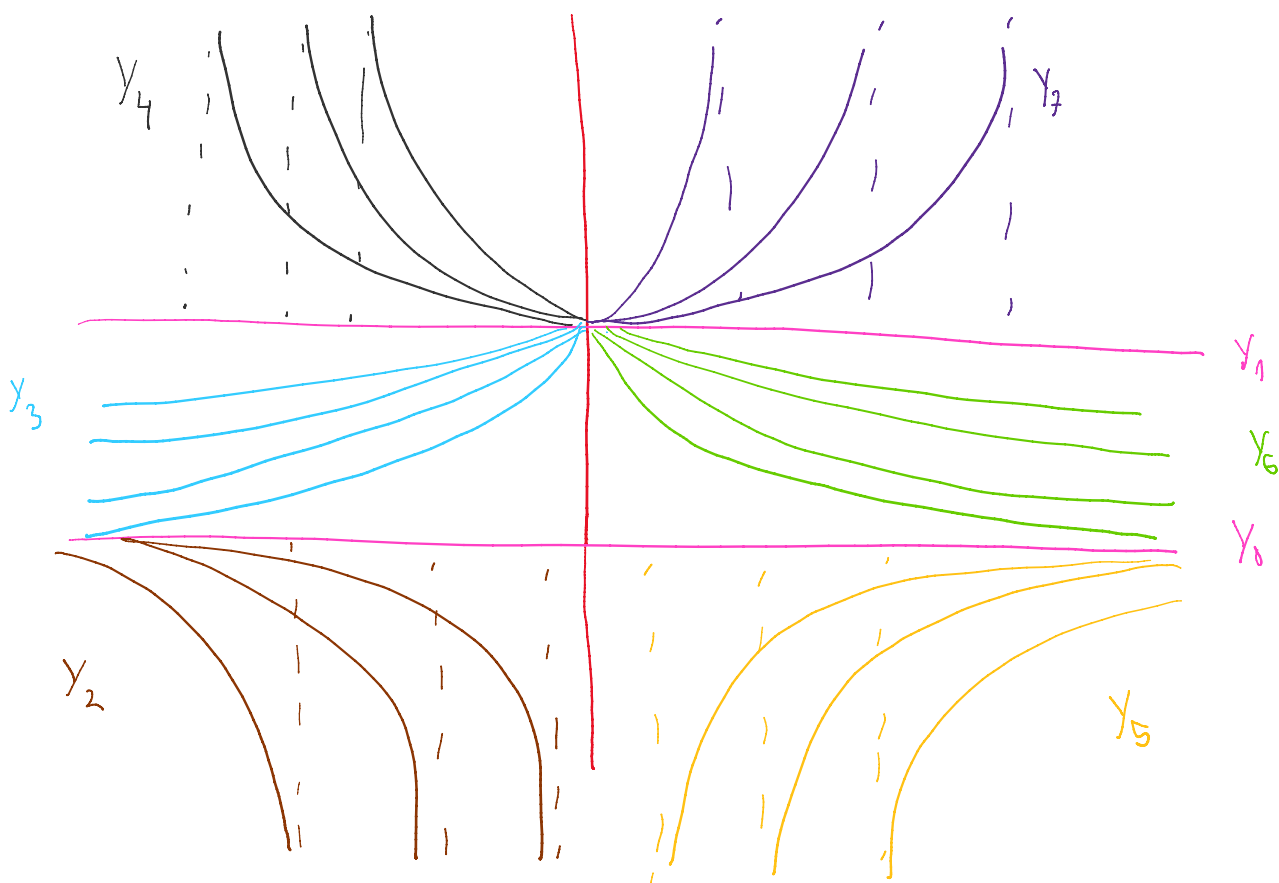
Řešení: $y_2 = \frac{1}{1 - e^{\log(x)+C}} = \frac{1}{1 + e^C x}, \quad x \in (-\infty, -e^{-C})$

Obdobně dostaneme řešení

$y_3 = \frac{1}{1 - e^C x}, \quad x \in (-\infty, 0) \quad y_5 = \frac{1}{1 - e^C x}, \quad x \in (e^{-C}, \infty)$

$y_4 = \frac{1}{1 + e^C x}, \quad x \in (-e^{-C}, 0) \quad y_6 = \frac{1}{1 + e^C x}, \quad x \in (0, \infty)$

$y_7 = \frac{1}{1 - e^C x}, \quad x \in (0, e^{-C})$



(5)

lepení – v případě rovnice (*) lepit nelze (všechna řešení jsou již na maximálních intervalích $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, případně v bodech $\pm e^c$ mají nekonečné limity)

v případě rovnice (x) můžeme za jistých okolností lepit v bodě 0. Platí

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} y_3(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} y_3'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^c}{(1 - e^x)^2} = e^c$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} y_4(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} y_4'(x) = -e^c$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} y_6(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y_6'(x) = -e^c$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} y_7(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y_7'(x) = e^c$$

$$\frac{1}{1 - e^x} \quad \frac{1}{1 + e^x}$$

Položíme $\tilde{y}_0(x) = \frac{1}{1-e^x}$, $x \in (-\infty, e^c)$ $\leftarrow \begin{cases} x_4(x), & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x = 0 \\ y_2(x), & x \in (0, e^c) \end{cases}$

Potom $\tilde{y}_0$ splňuje rovnici (*) na $(-\infty, e^c) \setminus \{0\}$, ověříme platnost rovnice v bodě 0. Platí $\tilde{y}_0(0) = 1$, $\tilde{y}_0'(0) = e^c$, dostáváme tedy rovnici $0 \cdot y'(0) + y(0) = 1 = y(0)$.

Funkce $\tilde{y}_0$ tedy řeší rovnici (*) na $(-\infty, e^c)$, toto řešení je jisté maximální ($\lim_{x \rightarrow e^c} \tilde{y}_0(x) = \infty$)

Obdobně dostaneme řešení $\hat{y}_1(x) = \frac{1}{1+e^x}$ na intervalu $(-e^c, \infty)$.

Všechna maximální řešení rovnice (*) jsou tedy $y_0, y_1, \tilde{y}_0$ a $\tilde{y}_1$.

(9) viz tutorál

(10) $xy' = 2x - y \Rightarrow y' = 2 - \frac{y}{x} \rightarrow$ homogenní rovnice

Použijeme substituci $z = \frac{y}{x}$, potom $xz = y$ a $xz' + z = y'$

dosažením do (*) dostaneme $xz' + z = y' = 2 - \frac{y}{x} = 2 - z$, po úpravě $xz' = 2 - 2z$ (*)

Tato rovnice stále ještě není ve tvaru separovaných proměnných, поделиme ještě x

a dostáváme rovnici $z' = \frac{2-2z}{x}$ (*) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(z) = 1-z$

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow I_1 = (-\infty, 0), I_2 = (0, \infty)$

(b) $D_g = \mathbb{R}$, $g(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \rightarrow J_1 = (-\infty, 1), J_2 = (1, \infty)$

(c) stacionární řešení $y_0 = 1$ (na I_1 a I_2)

(d) $F(x) = \log x^2$ na I_1, I_2

$G(z) = -\log |1-z|$ na J_1, J_2

$$\begin{cases} -\log(1-z) & \text{na } J_1 \\ -\log(z-1) & \text{na } J_2 \end{cases}$$

(e)

$G^{-1}(t) = 1 - e^{-t}$ na J_1 , $G^{-1}(t) = 1 + e^{-t}$ na J_2

$G(J_1) = \mathbb{R} = G(J_2)$

Volme $C \in \mathbb{R}$

• $I = I_1, J = J_1$ $\{x \in I_1 : F(x) + C \in G(J_1)\} = \{x \in (-\infty, 0) : \log x^2 + C \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 0)$

$\log x^2 + C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 \in (0, \infty) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ x < 0

$y_1 = 1 - e^{-(\log x^2 + C)} = 1 - \frac{e^{-C}}{x^2}, x \in (-\infty, 0)$

• $I = I_2, J = J_1$

$y_2 = 1 - \frac{e^{-C}}{x^2}, x \in (0, \infty)$ x > 0

Obdobně pro $I = I_{1,2}, J = J_2$ $y_3 = 1 + \frac{e^{-C}}{x^2}, x \in (-\infty, 0)$

$y_4 = 1 + \frac{e^{-C}}{x^2}, x \in (0, \infty)$

(f) řešení jsou maximální jako řešení (*) i (*).

Obecní řešení: $y = 1 + \frac{D}{x^2}$ $C \in \mathbb{R}$ na $(-\infty, 0), (0, \infty)$

Řešení (*): máme $y = xz = x + \frac{D}{x}$ $x \in (-\infty, 0), (0, \infty)$ (stejně maximální)

Řešení (*): opět $y = x + \frac{D}{x}$ na $(-\infty, 0), (0, \infty)$ (maximální)

(11) a (12) viz tutoriál